Variations de fonctions
Correction des exercices de préparation.

E 7.A $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

1°) La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, f semble paire.

2°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = f(x)$, donc f est paire.

E 7.B $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto f(x) = \dfrac{3}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto g(x) = \dfrac{-2}{x}$.

1°) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $f(-x) = \dfrac{3}{-x} = -\dfrac{3}{x} = -f(x)$

$$g(-x) = \frac{-2}{-x} = \frac{2}{x} = -\left(\frac{-2}{x}\right) = -g(x)$$

On a donc bien f et g impaires.

2°) Pour cet exercice, vous admettez (provisoirement) que la fonction inverse : $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tq $a < b$

$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (la fonction inverse est décroissante)

$\dfrac{3}{a} > \dfrac{3}{b}$ (multiplication par 3)

Donc $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$, i.e. f est décroissante (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tq $a < b$

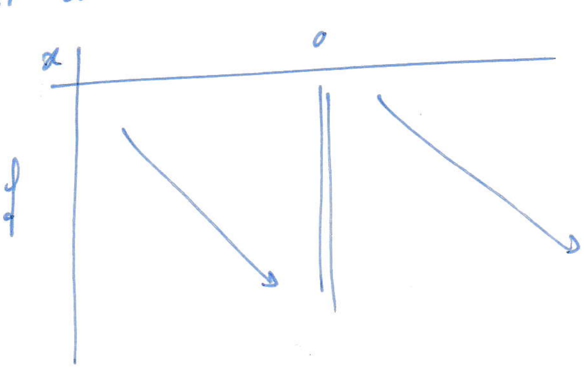
$\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$ (inverse décroissante)

$\dfrac{-2}{a} < \dfrac{-2}{b}$ (multiplication par -2)

Donc $a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$, i.e. g croissante (sur $\mathbb{R}_+^*$).

Il suffit de les étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ car on pourra compléter par symétrie.

3°)

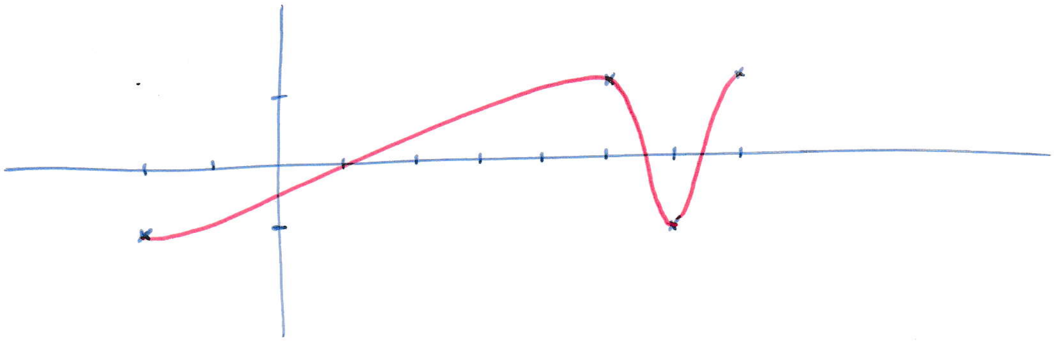


4°) Le tracé est conforme.

Q 7.C.

1°)

x	-2		5		6		7
f	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1



Q 7.D.

1a) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, tq $a < b$

$a^2 < b^2$ (f° carré croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$2a^2 < 2b^2$ (multiplication par $2>0$)

$f(a) < f(b)$

Donc f est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$

1b) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, tq $a < b$

$a^2 < b^2$ (f° carré croissante sur $\mathbb{R}_+$)

$-\frac{1}{2}a^2 > -\frac{1}{2}b^2$ (mult° par $-\frac{1}{2} < 0$)

$g(a) > g(b)$.

Donc g est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2(-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, f est paire.

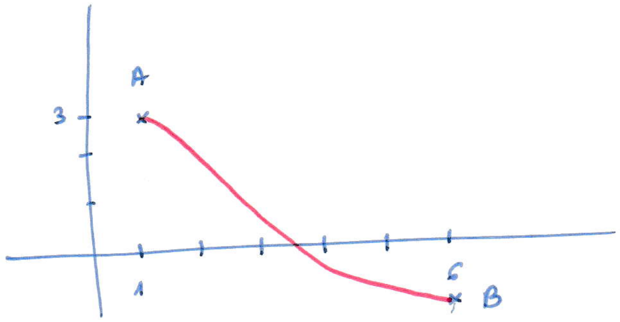
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^2 = -\frac{1}{2}x^2 = g(x)$, g est paire.

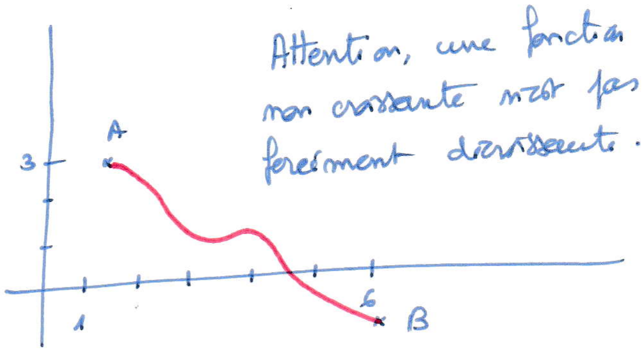
On complète par symétrie pour obtenir les tableaux de variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$		$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
		$\nearrow$		$\searrow$	

Ex 7.E

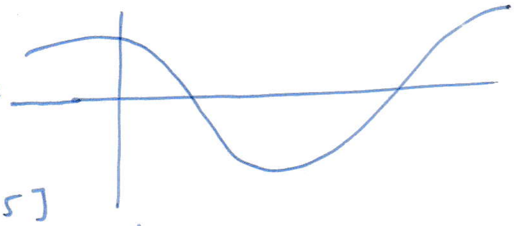




Attention, une fonction non croissante n'est pas forcément décroissante.

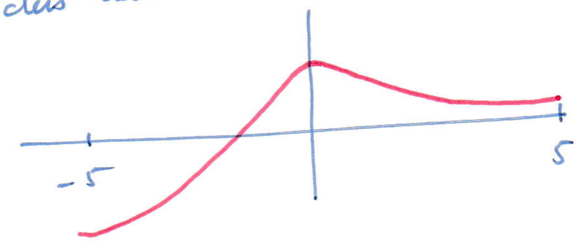
Ex 7.F

1. Faux. Contre-exemple :



2. Vrai car $[0;1] \subset [-5;5]$
est inclus dans.

3. Faux. Contre-exemple :



Ex 7.G

$g : x \in [-2;6] \longmapsto g(x) = (x-3)^2+1.$

1°) g semble décroissante sur $[-2;3]$, et croissante sur $[3;6]$, avec un minimum en 3.

2.a) Soit $x \in [-2;6]$. $g(x) - g(3) = (x-3)^2+1 - g(3)$, avec $g(3) = 1$
$= (x-3)^2 + 1 - 1$
$= (x-3)^2$

2b) En tant que carré, $\forall x \in [-2;6]$, $g(x) - g(3) \geq 0$

2c) Donc $\forall x \in [-2;6]$, $g(x) \geq g(3)$, i.e. g admet un minimum en 3, et ce minimum vaut $g(3) = 1$.

Ex 7.H

1°) Les prix sont des réels positifs, donc $\mathcal{D}_B = \mathcal{D}_R = \mathbb{R}_+$.

2°) $B : x \longmapsto 0,3x$
$R : x \longmapsto x - 0,3x = 0,7x$.

3°) Les fonctions B et R sont des fonctions linéaires (affines) dont le coefficient directeur (ou taux de variation) est positif : Elles sont croissantes.

Plus le prix est élevé, plus la réduction est élevée, mais plus le prix après réduction est également élevé.

Q7.I

1°) $n \in [\![100 ; 400]\!]$ (on note avec des doubles barres les "intervalles d'entiers").

$C(n) = 80 + 40 \times n$
$= 40n + 80$ (fonction affine).

$C_m(n) = \frac{C(n)}{n} = \frac{40n + 80}{n} = \frac{40n}{n} + \frac{80}{n} = 40 + \frac{80}{n}$.

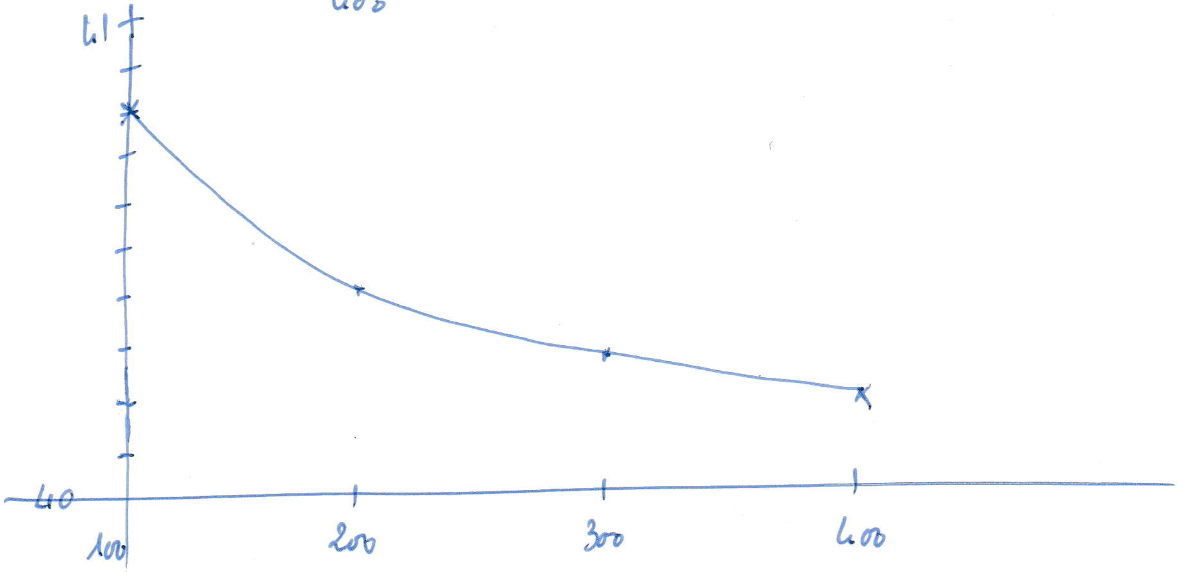
2°) $f(x)$ correspond à $C_m(n)$.

a) $C(n)$ est une fonction affine dont le coefficient directeur est positif : elle est strictement croissante.
Le coût total augmente.

b) La fonction inverse est décroissante, donc f (ou C_m) est décroissante.
Le coût moyen diminue.

3°) $f(100) = \frac{80}{100} + 40 = 40,8$; $f(200) = \frac{80}{200} + 40 = 40,4$

$f(400) = \frac{80}{400} = 40,2$; $f(300) = \frac{80}{300} + 40 = 40,27$



$40 + \frac{80}{n} < 40,70$

$\Leftrightarrow \frac{80}{n} < 0,70$

$\Leftrightarrow \frac{80}{n} > \frac{1}{0,7}$ (fonction inverse décroissante)

$\Leftrightarrow 80 > \frac{1}{0,7} \times n$ $(n > 0)$

$\Leftrightarrow n > 80 \times 0,7$

$\Leftrightarrow n > 56$

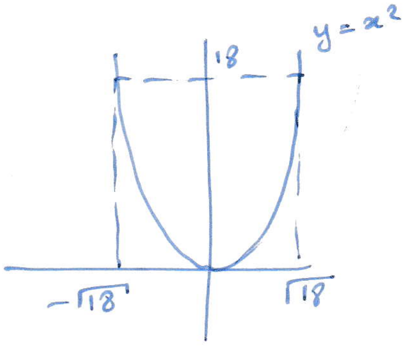
La production doit être supérieure à 56 [illegible]

Ex 07.5 $\quad f : x \in [-4;4] \longmapsto f(x) = x^4 - 18x^2$

1°) Sur $[-4;4]$, f semble croissante jusqu'à 0 puis décroissante, et semble admettre un maximum local en 0.

2a) $x^2 \leq 18$ ssi $-\sqrt{18} \leq x \leq \sqrt{18}$

$$\underbrace{-3\sqrt{2}}_{\simeq -4,24} \leq x \leq \underbrace{3\sqrt{2}}_{\simeq 4,24}$$



$S = [-3\sqrt{2} ; 3\sqrt{2}]$

En particulier, $\forall x \in [-4;4]$, $x^2 \leq 18$.

2b) $f(0) = 0$

f admet un maximum en 0 sur $[-4;4]$ ssi

$\forall x \in [-4;4]$, $f(x) \leq f(0)$, où $f(0) = 0$

$x^4 - 18x^2 \leq 0$

$x^2(x^2 - 18) \leq 0$

Or le carré x^2 est positif, donc ce produit est négatif ssi

$x^2 - 18 \leq 0$

$x^2 \leq 18$, ce qui est vrai pour tout x de $[-4;4]$

d'après la question précédente.

Donc f admet un maximum local en 0 sur $[-4;4]$, et ce maximum vaut 0.